

- Excitação harmônica
- Excitação periódica
- Resposta ao impulso
- Excitação arbitrária

Excitação Periódica Não Harmônica

qualquer função
periódica



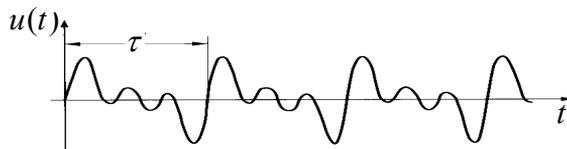
pode ser representada por uma série
infinita de componentes harmônicas



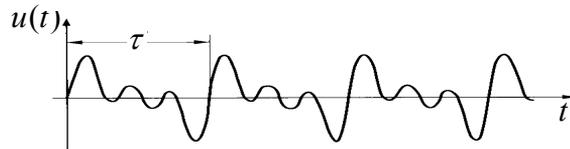
função que se repete no
tempo com um período fixo τ



observado dentro de um bloco
 $t < \tau$, função não é periódica



seja uma
função
periódica



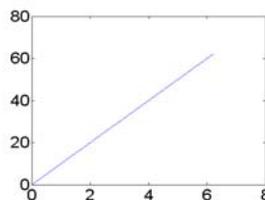
pode ser representada por uma série
infinita de componentes harmônicas

Série de Fourier

$$u(t) = a_0 + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + \dots + a_n \cos n\omega t + \\ + \dots + b_1 \sin \omega t + b_2 \sin 2\omega t + \dots + b_n \sin n\omega t + \dots$$

A combinação de vários senos e cossenos em frequências
diferentes formam a função original $u(t)$

Exemplo: Ilustrar, graficamente, os 5 primeiros termos da série de Fourier da função $u(t) = 10t$.

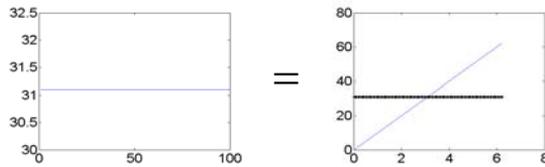


Expansão em série de Fourier:

$$u(t) = a_0 + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + \dots + a_n \cos n\omega t + \\ + \dots + b_1 \sin \omega t + b_2 \sin 2\omega t + \dots + b_n \sin n\omega t + \dots$$

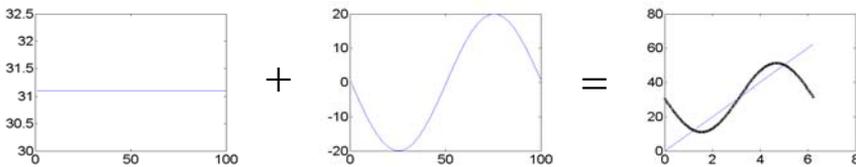
Primeiro termo da série:

$$u(t) = a_0$$



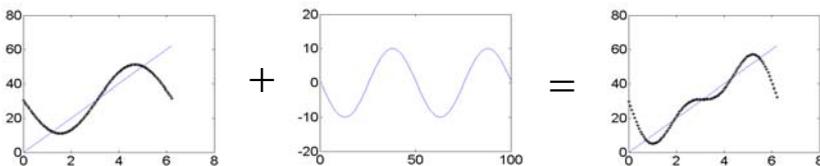
Segundo termo da série:

$$u(t) = a_0 + a_1 \cos \omega t + b_1 \text{sen} \omega t$$



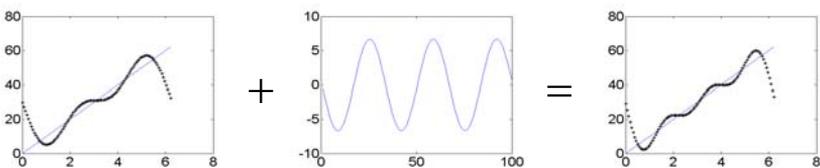
Terceiro termo da série:

$$u(t) = a_0 + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + b_1 \text{sen} \omega t + b_2 \text{sen} 2\omega t$$



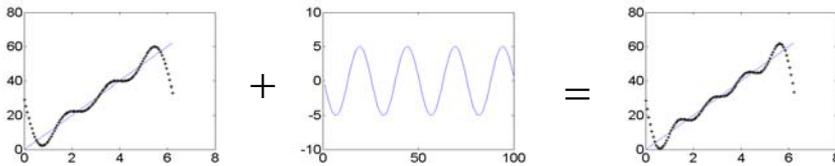
Quarto termo da série:

$$u(t) = a_0 + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + a_3 \cos 3\omega t + b_1 \text{sen} \omega t + b_2 \text{sen} 2\omega t + b_3 \text{sen} 3\omega t$$

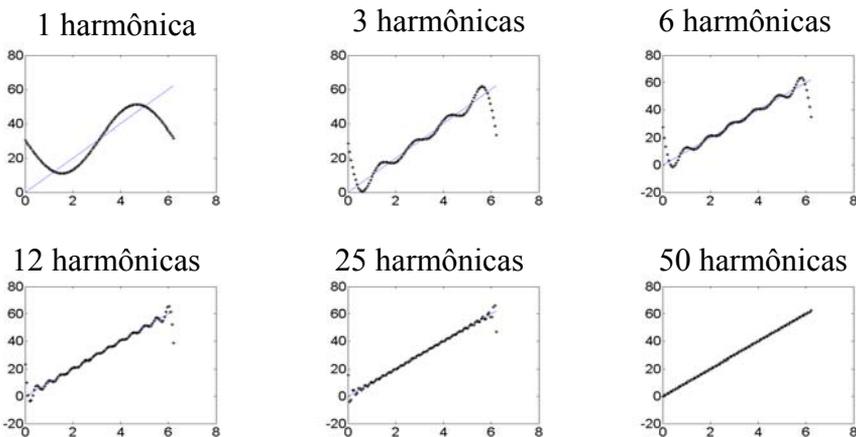


Quinto termo da série:

$$u(t) = a_0 + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + a_3 \cos 3\omega t + a_4 \cos 4\omega t + b_1 \sin \omega t + b_2 \sin 2\omega t + b_3 \sin 3\omega t + b_4 \sin 4\omega t$$



Número de componentes harmônicas na série de Fourier.



Cálculo dos coeficientes da série de Fourier:

$$u(t) = a_0 + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + \dots + a_n \cos n\omega t + \\ + \dots + b_1 \sin \omega t + b_2 \sin 2\omega t + \dots + b_n \sin n\omega t + \dots$$

$$z = \omega t \quad \Downarrow$$

$$u(t) = a_0 + a_1 \cos z + a_2 \cos 2z + \dots + a_n \cos nz + \\ + \dots + b_1 \sin z + b_2 \sin 2z + \dots + b_n \sin nz + \dots$$

Cálculo dos coeficientes da série de Fourier:

Termo a_0 .

$$u(t) = a_0 + a_1 \cos z + a_2 \cos 2z + \dots + a_n \cos nz + \\ + \dots + b_1 \sin z + b_2 \sin 2z + \dots + b_n \sin nz + \dots$$

$$\int_0^{2\pi} u(t) dz = \int_0^{2\pi} (a_0 + a_1 \cos z + a_2 \cos 2z + \dots + a_n \cos nz + \\ + b_1 \sin z + b_2 \sin 2z + \dots + b_n \sin nz + \dots) dz$$

$$a_0 z \Big|_0^{2\pi}$$

$$\int_0^{2\pi} u(t) dz = a_0 z \Big|_0^{2\pi} \quad \Rightarrow \quad a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(t) dz$$

Termo a_n .

$$\int_0^{2\pi} u(t) \cos nz \, dz = \int_0^{2\pi} \underbrace{\left(a_0 + a_1 \cos z + a_2 \cos 2z + \dots + a_n \cos nz + b_1 \text{senz} + b_2 \text{sen} 2z + \dots + b_n \text{sennz} + \dots \right)}_{\pi a_n} \cos nz \, dz$$

$$\int_0^{2\pi} u(t) \cos nz \, dz = \int_0^{2\pi} a_n \cos^2 nz \, dz$$

$$\int_0^{2\pi} u(t) \cos nz \, dz = \pi a_n \quad \Rightarrow \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(t) \cos nz \, dz$$

Termo b_n .

$$\int_0^{2\pi} u(t) \text{sennz} \, dz = \int_0^{2\pi} \underbrace{\left(a_0 + a_1 \cos z + a_2 \cos 2z + \dots + a_n \cos nz + b_1 \text{senz} + b_2 \text{sen} 2z + \dots + b_n \text{sennz} + \dots \right)}_{\pi b_n} \text{sennz} \, dz$$

$$\int_0^{2\pi} u(t) \text{sen} nz \, dz = \int_0^{2\pi} b_n \text{sen}^2 nz \, dz$$

$$\int_0^{2\pi} u(t) \text{sen} nz \, dz = \pi b_n \quad \Rightarrow \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(t) \text{sennz} \, dz$$

Resumindo: Qualquer função periódica pode ser representada por uma série infinita de funções harmônicas:

$$u(t) = a_0 + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + \dots + a_n \cos n\omega t + \\ + \dots + b_1 \text{sen} \omega t + b_2 \text{sen} 2\omega t + \dots + b_n \text{sen} n\omega t + \dots$$

ou

$$u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \text{sen} n\omega t)$$

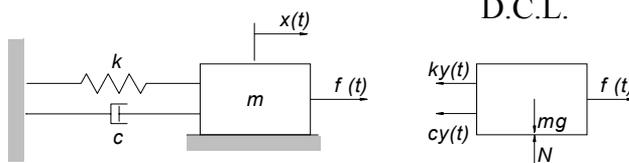
sendo

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(t) dz$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(t) \cos nz dz$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(t) \text{sen}nz dz$$

Resposta de um sistema de 1GL a uma força periódica



Equação de movimento na direção x :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f$$

Seja a força periódica não harmônica descrita pela expressão:

$$f(t) = a_0 + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + \dots + a_n \cos n\omega t + \\ + \dots + b_1 \text{sen} \omega t + b_2 \text{sen} 2\omega t + \dots + b_n \text{sen} n\omega t + \dots$$

Assim:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = a_0 + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + \dots + a_n \cos n\omega t + \dots + b_1 \sin \omega t + b_2 \sin 2\omega t + \dots + b_n \sin n\omega t + \dots$$

Lembrando que, como o sistema é linear, vale o princípio da superposição, tem-se:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Solução} & & \text{Solução} & & \text{Solução} & & \text{Solução} \\ \text{particular} & = & \text{particular} & + & \text{particular} & + \dots + & \text{particular} \\ \text{total} & & \text{devido à} & & \text{devido à} & & \text{devido à} \\ & & \text{excitação 1} & & \text{excitação 2} & & \text{excitação n} \end{array}$$



$$x_p(t) = x_p^{(1)}(t) + x_p^{(2)}(t) + \dots + x_p^{(n)}(t)$$

Resposta de um sistema de 1GL excitado por uma força constante de amplitude a_0 :

$$x_p(t) = \frac{a_0}{k}$$

Resposta de um sistema de 1GL excitado por uma força harmônica cossenoidal de amplitude a_s e frequência ω_s :

$$x_p(t) = \frac{a_s/m}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega_s^2)^2 + (2\zeta\omega_s\omega_n)^2}} \cos\left(\omega_s t - \tan^{-1} \frac{2\zeta\omega_s\omega_n}{\omega_n^2 - \omega_s^2}\right)$$

Resposta de um sistema de 1GL excitado por uma força harmônica senoidal de amplitude b_s e frequência ω_s :

$$x_p(t) = \frac{b_s/m}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega_s^2)^2 + (2\zeta\omega_s\omega_n)^2}} \sin\left(\omega_s t - \tan^{-1} \frac{2\zeta\omega_s\omega_n}{\omega_n^2 - \omega_s^2}\right)$$

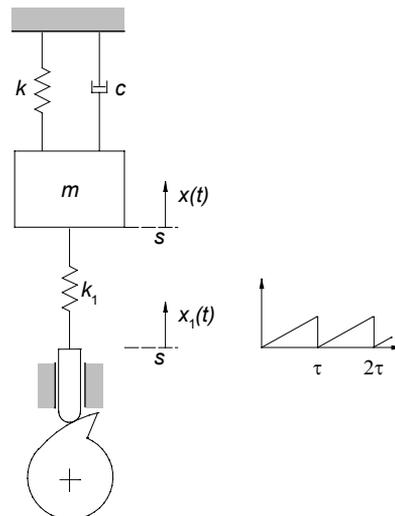
Portanto, a resposta permanente total de um sistema de 1GL excitado por uma força periódica não harmônica do tipo

$$f(t) = a_0 + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + \dots + a_n \cos n\omega t + \dots + b_1 \sin \omega t + b_2 \sin 2\omega t + \dots + b_n \sin n\omega t + \dots$$

pode ser escrita como:

$$x_p(t) = \frac{a_0}{k} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{a_s/m}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega_s^2)^2 + (2\zeta\omega_s\omega_n)^2}} \cos\left(\omega_s t - \tan^{-1} \frac{2\zeta\omega_s\omega_n}{\omega_n^2 - \omega_s^2}\right) + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{b_s/m}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega_s^2)^2 + (2\zeta\omega_s\omega_n)^2}} \sin\left(\omega_s t - \tan^{-1} \frac{2\zeta\omega_s\omega_n}{\omega_n^2 - \omega_s^2}\right)$$

Exemplo: Um came atuando em um sistema massa-mola é apresentado na figura ao lado. O came gira a $60rpm$ e o deslocamento aplicado ao sistema tem a forma de uma função dente-de-serra, com amplitude de $25mm$. Sendo $m = 20kg$, $k = k_1 = 3,5kN/m$ e $c = 0,2kN.s/m$, determine a resposta $x(t)$ do sistema.



Solução: Um ciclo do movimento do came pode ser expresso pela seguinte equação:

$$x_1(t) = \frac{1}{\tau}t \quad \text{para } 0 < t < \tau$$

A frequência fundamental é 1Hz ou $\omega = 2\pi$. Assim, o período τ vale $1s/ciclo$. Calculando-se os coeficientes da série de Fourier obtém-se:

$$a_0 = 1 \quad a_n = 0 \quad b_n = -\frac{1}{n\pi}$$

Portanto, a expansão em série de Fourier de $x_1(t)$ é:

$$x_1(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{sen}2n\pi t$$

A equação de movimento do sistema é:

$$\ddot{m}x + c\dot{x} + (k + k_1)x = k_1 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{sen}2n\pi t \right)$$

Define-se:

$$\omega_n^2 = \frac{(k + k_1)}{m}, \quad \frac{c}{m} = 2\zeta\omega_n \quad \text{e} \quad r = \frac{\omega}{\omega_n}$$

A resposta do sistema devido à excitação constante vale:

$$x_p(t) = \frac{k_1}{2(k + k_1)}$$

A resposta do sistema devido à uma excitação harmônica de frequência $n\omega = 2n\pi$ é do tipo:

$$x_{p_n}(t) = -\frac{k_1}{n\pi(k+k_1)\sqrt{(1-n^2r^2)^2+(2\zeta nr)^2}} \operatorname{sen}\left(2\pi nt - \tan^{-1}\frac{2\zeta nr}{1-n^2r^2}\right)$$

Utilizando-se o princípio da superposição, pode-se escrever que a solução total será:

$$x_{p_n}(t) = \frac{k_1}{k+k_1} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{(1-n^2r^2)^2+(2\zeta nr)^2}} \operatorname{sen}\left(2\pi nt - \tan^{-1}\frac{2\zeta nr}{1-n^2r^2}\right) \right)$$